Rappel : $\partial_j \mathbb{1}_\Omega = -\nu_j \sigma$ $(*)$

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, \rho(x) < 0\}$ $\quad 1 \le j \le d$

$\partial\Omega = \{\rho(x) = 0\}$; $\nu = \dfrac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ ←

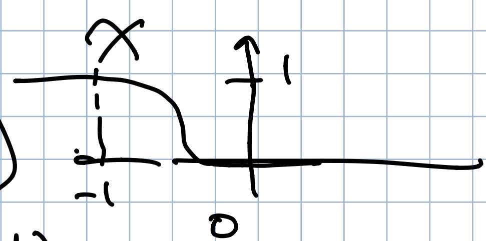
$\langle \sigma, g \rangle = \int g(y) \sqrt{1 + |\nabla f(y)|^2}\, dy$

$\partial\Omega = \{x_d = f(x')\}$.

$x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$

On a : $-\nu \cdot \nabla \mathbb{1}_\Omega = \sigma$ $(**)$

$\chi_R(x) := \chi(R\rho(x))$



$\chi_R \xrightarrow[R\to\infty]{} \mathbb{1}_\Omega$ $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$\nu_j \, \nu \cdot \nabla \mathbb{1}_\Omega = -\nu_j \sigma$

Il faut montrer que $\nu_j \, \nu \cdot \nabla \mathbb{1}_\Omega = \partial_j \mathbb{1}_\Omega$

Calculons $\underbrace{\langle \nu_j \, \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle}_{= I_R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$I_R = \int \nu_j(x)\, \nu \cdot \nabla \chi_R(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= R \int \nu_j(x)\, \nu \cdot \nabla\rho(x)\, \chi'(R\rho(x))\, \varphi(x)\, dx$$

$$= R\int \nu_j(x)\, |\nabla\rho(x)|\, \chi'(R\rho(x))\, \varphi(x)\, dx$$

$$= R\int \underbrace{\partial_j \rho(x)\, \chi'(R\rho(x))}\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int \partial_j \chi_R(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \langle \partial_j \chi_R, \varphi \rangle$$

Mais $\chi_R \longrightarrow \mathbb{1}_\Omega$ donc $\partial_j \chi_R \to \partial_j \mathbb{1}_\Omega$

Donc $I_R \longrightarrow \langle \partial_j \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle$

D'où le théorème. ∎

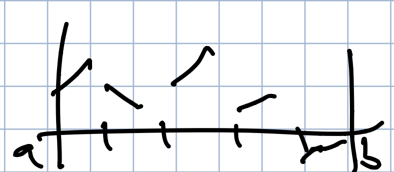
Quelques applications :

- la formule des sauts en $d=1$ et $d>1$.

<u>Théorème</u> : Soit f définie sur $]a,b[\subset \mathbb{R}$, telle que $\exists\, a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$, t.q $f \in C^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \le i \le n-1$, et f et f' se prolongent de manière continue à $]a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, …, $[a_{n-1}, a_n[$.

$g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle T_f, g \rangle = \int fg$

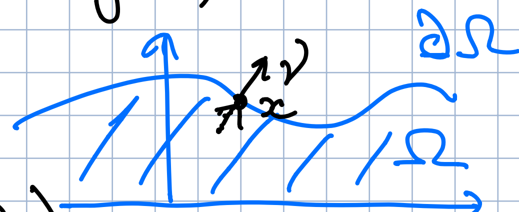


$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n-1} [f(a_i^+) - f(a_i^-)]\, \delta_{a_i} .$$

$$f(a_i^\pm) := \lim_{r \to 0^+} f(a_i \pm r)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$-\int f g' = \int f' g + \sum \text{saut } g(a_i)$$



$d > 1$:

<u>Thm</u> : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega)$ telle que $f_{|\Omega}$ se prolonge à une fonction C^1 dans un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$, et $f_{|\mathbb{R}^d \setminus \Omega}$ se prolonge en une fonction C^1 dans un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Alors $\forall\, 1 \leq j \leq d$,

$$\partial_j (T_f) = T_{\partial_j f} + [f]_{\partial\Omega}\, \nu_j\, \sigma$$

où $[f]_{\partial\Omega}(x) = \lim_{r \to 0^+} [f(x + r\nu) - f(x - r\nu)]$.

$\forall x \in \partial\Omega$

<u>Démonstration</u> : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$-\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \partial_j \varphi(x)\, dx = -\int_{\Omega} f(x)\, \partial_j \varphi(x)\, dx \quad (1)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} f(x)\, \partial_j \varphi(x)\, dx \quad (2)$$

$$(1) = -\int_\Omega \partial_j (f\varphi)(x)\, dx + \int_\Omega \partial_j f\, \varphi(x)\, dx$$

Mais $\quad - \int_\Omega \partial_j (f\varphi) = + \langle \partial_j \mathbb{1}_\Omega , f\varphi \rangle$

$$= \langle -\nu_j \sigma , f\varphi \rangle$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\lim_{r\to 0} (\underbrace{f(x-r\nu)})}\, \varphi(x) (-\nu_j)\, d\sigma$$

$$(2) = -\int_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} \partial_j (f\varphi)(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} \partial_j f\, \varphi(x)\, dx$$

$f \in C^1$, $\varphi \in C^\infty$, $\langle T, f\varphi \rangle$??

T ordre 0 $\Leftrightarrow$ il suffit que $f\varphi \in C^0$

1 $\quad C^1$

$$(2) = + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\lim_{r\to 0} (f(x+r\nu))}\, \varphi(x)\, \nu_j\, d\sigma$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} \partial_j f\, \varphi(x)\, dx.$$

Finalement

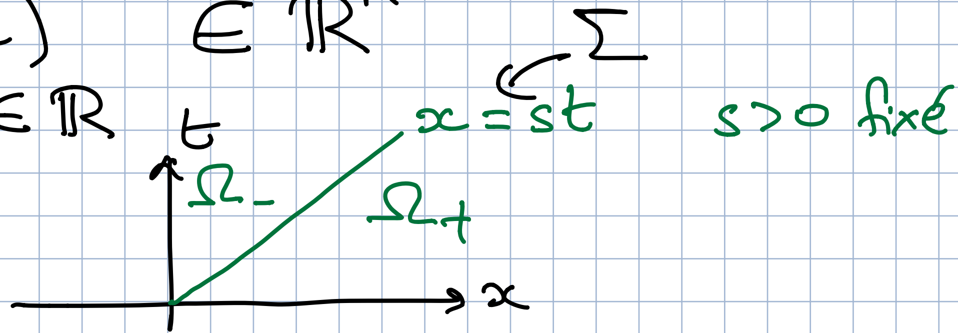
$$- \int_{\mathbb{R}^d} f \partial_j \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f\, \varphi(x) + [f]_{\partial\Omega} \nu_j \sigma$$

$\boxed{3}$

Application aux EDP : Relations de Rankine-Hugoniot.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \geq 0}}{U(t}, \underset{\substack{\downarrow \\ \in \mathbb{R}}}{x)} \in \mathbb{R}^n$$

"Front"



$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \Sigma \qquad F \ C^1 \text{ non linéaire}$$

$$\Omega_- := \{(t,x) \,/\, x < st\} \qquad (x_d = f(x'))$$

Notation précédente $f(t) = st$

$\rho(t,x) = x - st$

$$\nabla \rho = \begin{pmatrix} \partial_t \rho \\ \partial_x \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle \sigma, g \rangle = \int g(t, st) \sqrt{1+s^2}\, dt$$

Calculer $\partial_t U + \partial_x F(U)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$?

$$\partial_t T_U + \partial_x T_{F(U)} = T_{\partial_t U + \partial_x F(U)} + \text{"}\underbrace{[U + F(U)]_\Sigma}_{?} \nu \sigma\text{"}$$

$$\partial_t T_U = T_{\partial_t U} + [U(t, st^+) - U(t, st^-)](-s)\sigma$$

$$\partial_x T_{F(U)} = T_{\partial_x U} + [F(U)(t,st^+) - F(U)(t,st^-)]\sigma$$

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \setminus \Sigma \\ F(U)(t,st^+) - sU(t,st^+) = F(U)(t,st^-) \\ \qquad\qquad\qquad -sU(t,st^-) \\ \qquad\qquad\qquad \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Rankine-Hugoniot.

- Convolution
- Distributions tempérées
- Résolution d'EDP

---

(6) CONVOLUTION

$f, g \in L^1$, $f * g(x) = \int f(y) g(x-y)\, dy$

Rq: $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$

(Fubini : $\int |f*g|(x)\,dx = \int |f(y)|\,dy \int |g(z)|\,dz$)

DÉFINITION : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

on définit

$$T * \varphi(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Exercice : $\text{supp}(T * \varphi) \subset \text{supp}\, T + \text{supp}\, \varphi$

Exemple : $a \in \mathbb{R}^d$, $\delta_a * \varphi(x) = \varphi(x-a)$

En effet $\delta_a * \varphi(x) = \langle \delta_a, \varphi(x - \cdot) \rangle$

$$= \varphi(x-a).$$

En particulier $\delta_0 * \varphi = \varphi$.

PROPOSITION : Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ alors $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi$$
$$= T * \partial^\alpha \varphi.$$

Démonstration : Mq $\partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi$

$$\partial^\alpha T * \varphi = \langle \partial^\alpha T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\varphi(x - \cdot)) \rangle$$
$$= \langle T, (\partial^\alpha \varphi)(x - \cdot) \rangle$$

Donc $\partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi$.

Mq $T * \varphi \in C^\infty$ et $\partial^\alpha (T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi$

Soit $a \in \mathbb{R}^d$, mq $T * \varphi \in C^\infty(B(a,1))$.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi \equiv 1$ dans $B(a,1)$.

Alors $\chi(x) T * \varphi(x) = \langle T, \underbrace{\chi(x)\varphi(x-\cdot)}_{\psi(x,\cdot)} \rangle$

$\psi(x,y) := \chi(x)\varphi(x-y)$ est $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$

à support dans $\operatorname{supp} \chi * (\operatorname{supp} \varphi + \operatorname{supp} \chi)$

Par le théorème d'échange de $\langle , \rangle$ et des dérivées on sait que $F : x \mapsto \langle T, \psi(x,\cdot)\rangle$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha F(x) = \langle T, \partial^\alpha_x \psi(x,\cdot)\rangle$$
$$= \langle T, \partial^\alpha_x (\underbrace{\chi(x)}_{\equiv 1}\varphi(x-\cdot))\rangle$$

Donc dans $B(a,1)$ on a

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = \langle T, \partial^\alpha \varphi(x-\cdot)\rangle$$
$$= T * \partial^\alpha \varphi.$$

$\blacksquare$

Donc : " $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$ est $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ "

Rq : $\mathcal{E}' * C^\infty$ est bien défini et $C^\infty(\mathbb{R}^d)$
(exercice) $\mathcal{E}' * \mathcal{D}$ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Théorème : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et ζ_ε une suite régularisante.
Alors $T * \zeta_\varepsilon \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Soit $T_\varepsilon := T * \zeta_\varepsilon$, alors

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \int \langle T, \zeta_\varepsilon(x - \cdot) \rangle \varphi(x)\, dx$$

$$= \int \langle T, \zeta_\varepsilon(x - \cdot)\varphi(x) \rangle\, dx$$

$$= \langle T, \int \zeta_\varepsilon(x - \cdot)\varphi(x)\, dx \rangle$$

car $\psi_\varepsilon(x, y) := \zeta_\varepsilon(x - y)\varphi(x)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$, par le théorème d'échange de $\langle , \rangle$ et $\int$.

En notant $\check{\zeta}_\varepsilon(y) := \zeta_\varepsilon(-y)$, alors

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, \int \check{\zeta}_\varepsilon(\cdot - x)\varphi(x)\, dx \rangle$$

$$= \langle T, \check{\zeta}_\varepsilon * \varphi \rangle$$

Mais $\check{\zeta}_\varepsilon * \varphi \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:

en effet : $\operatorname{supp}(\check{\zeta}_\varepsilon * \varphi)$ est inclus dans $K := \operatorname{supp}\varphi + B(0,1)$, et par ailleurs pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha(\check{\zeta}_\varepsilon * \varphi) = \check{\zeta}_\varepsilon * \partial^\alpha \varphi$, et $\check{\zeta}_\varepsilon * \partial^\alpha \varphi$ converge uniformément sur K vers $\partial^\alpha \varphi$. On conclut par la continuité des distributions que $\langle T, \check{\zeta}_\varepsilon * \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$

<u>DÉFINITION</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$

on définit $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \underbrace{\check{S} * \varphi}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \rangle$$

où $\langle \check{S}, \psi \rangle := \langle S, \check{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

où $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$. (\check)

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int f * g(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= \int f(y)\, g(x-y)\, \varphi(x)\, dx\, dy$$
$$= \langle f, \int g(x-y)\, \varphi(x)\, dx \rangle$$
$$= \langle f, \check{g} * \varphi \rangle)$$

$\mathcal{D}' *$ $\underbrace{\quad \varphi \quad}_{\mathcal{D}}$

<u>Exemples</u> : $T * \delta_a = T \circ \tau_{-a}$ où $\langle T\circ\tau_{-a}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\circ\tau_a\rangle$

$$\langle T * \delta_a , \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}_a * \varphi\rangle$$

$\varphi\circ\tau_a(x) = \varphi(x+a)$

$$\check{\delta}_a * \varphi(x) = \langle \check{\delta}_a , \varphi(x-\cdot)\rangle$$
$$= \langle \delta_a , \varphi(x+\cdot)\rangle = \varphi(x+a).$$

<u>PROPOSITION</u> : $\partial^\alpha (T*S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S.$

<u>Démonstration</u> : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \partial^\alpha (T*S), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T*S, \partial^\alpha \varphi\rangle$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{S} * \partial^\alpha \varphi\rangle$$

Mais $\check{S} * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha (\check{S} * \varphi)$

donc $\langle \partial^\alpha (T*S), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\check{S}*\varphi)\rangle$

$$= \langle \partial^\alpha T, \check{S} * \varphi\rangle$$
$$= \langle \partial^\alpha T * S, \varphi\rangle$$

Donc $\partial^\alpha (T*S) = \partial^\alpha T * S.$

D'autre part

$$\check{S} * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha \check{S} * \varphi$$

Donc $\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \check{S} * \varphi \rangle$

$$= \langle T, \underbrace{\partial^\alpha S * \varphi} \rangle$$

car $\partial^\alpha \check{S} = (-1)^{|\alpha|} \check{\partial^\alpha S}$. $\qquad \left(\partial^\alpha \check{\varphi} = (-1)^{|\alpha|} \check{\partial^\alpha \varphi}\right)$

D'où le résultat. ∎

<u>Rappel</u> :

- $\mathcal{D}' * \mathcal{D} \subset C^\infty$: $\quad T * \varphi(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$
- $\mathcal{E}' * \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$
- $\mathcal{E}' * C^\infty \subset C^\infty$
- $\underbrace{T * \zeta_\varepsilon}_{C^\infty} \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'$
- $\mathcal{D}' * \mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$ $\quad \langle T * E, \varphi \rangle := \langle T, \check{E} * \varphi \rangle$

  où $\langle \check{E}, \varphi \rangle := \langle E, \check{\varphi} \rangle$

  et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

$$\partial^\alpha (T * E) = \partial^\alpha T * E = T * \partial^\alpha E.$$

PROPOSITION : Soit (T_n) suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $T_n * \varphi \longrightarrow T * \varphi$ uniformément sur tout compact, et de même $\partial^\alpha (T_n * \varphi) \longrightarrow \partial^\alpha (T * \varphi)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

<u>Démonstration</u> : On sait que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$< T_n, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $T \equiv 0$. De même il suffit de démontrer le résultat pour $\alpha = 0$ puisque $\partial^\alpha (T_n * \varphi) = T_n * \partial^\alpha \varphi$.

On suppose donc que $< T_n, \varphi > \longrightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors mq $T_n * \varphi \longrightarrow 0$ uniformément sur tout compact. Autrement dit $\forall R > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|x| \leq R} |T_n * \varphi(x)| = 0. \quad (*)$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, $\forall K$ compact, $\exists C > 0$, $\exists p$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(K)$,

$$|< T_n, \psi >| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \psi(x)|. \quad (**)$$

Mais $T_n * \varphi(x) = < T_n, \varphi(x - \cdot) >$; supposons que $(*)$ n'est pas vérifiée.

Alors il existe (x_n) dans $\overline{B(0,R)}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que

$$|T_n * \varphi(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Par compacité, une sous-suite de (x_n) (notée toujours x_n) converge vers une limite $a \in \overline{B(0,R)}$.

$$|T_n * \varphi(a)| \geq |T_n * \varphi(x_n)| - |T_n * \varphi(a) - T_n * \varphi(x_n)|.$$

Soit $\varphi_n(x) := T_n * \varphi(x) - T_n * \varphi(x_n)$.

$$\sup_{x \in \overline{B(0,R)}} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{y \in D(0,R)} \sup_{1 \leq j \leq d} |\partial_j (T_n * \varphi)| \times |x_j - x_{n_j}|.$$

Mais $\partial_j (T_n * \varphi)(y) = T_n * \partial_j \varphi(y)$.

et $T_n * \partial_j \varphi(y) = \langle T_n, \partial_j \varphi(y - \cdot) \rangle$

donc
$$|T_n * \partial_j \varphi(y)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \partial_j \varphi(x)|$$
$$\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \leq p+1} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Pour conclure,

$$|T_n * \varphi(a)| \geq \varepsilon - Cd \sup_x \sup_{|\alpha| \leq p+1} |\partial^\alpha \varphi(x)| \times |a - x_n|$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{2},$$

pour n assez grand. Contradiction avec le fait que $T_n * \varphi(a) \longrightarrow 0$, $n \to \infty$ ∎

PROPOSITION : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$

$$\boxed{\text{Alors } \langle T, \check{E} * \varphi \rangle = \langle E, \check{T} * \varphi \rangle .}$$

On définit alors $E * T$ par $\langle E * T, \varphi \rangle = \langle E, \tilde{T} * \varphi \rangle$
et on a $T * E = E * T$.

<u>Démonstration</u> <u>Soit</u> $E_\varepsilon := E * \zeta_\varepsilon$,
à support dans $B(0,\varepsilon) + \operatorname{supp} E \subset B(0,1) + \operatorname{supp} E$.

$$\langle E_\varepsilon, \check{T} * \varphi \rangle = \int E_\varepsilon(x)\, \check{T} * \varphi(x)\, dx$$

$$= \int E_\varepsilon(x) \langle \check{T}, \varphi(x - \cdot) \rangle \, dx$$

$$= \int E_\varepsilon(x) \langle T, \varphi(x + \cdot) \rangle \, dx$$

On peut échanger $\langle \, , \, \rangle$ et $\int$ et donc

$$\langle E_\varepsilon, \check{T} * \varphi \rangle = \langle T, \int E_\varepsilon(x) \varphi(x + \cdot)\, dx \rangle$$

$$= \langle T, \check{E}_\varepsilon * \varphi \rangle \to \langle T, \check{E} * \varphi \rangle$$

Passons à la limite $\varepsilon \to 0$.

- $E_\varepsilon \to E$ dans $\mathcal{D}'$ (Proposition vue plus haut)

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, telle que $\chi \equiv 1$
sur un voisinage de $\overline{B(0,1)} + \operatorname{supp} E$.

$$\langle E_\varepsilon, \check{T} * \varphi \rangle = \langle E_\varepsilon, \chi (\check{T} * \varphi) \rangle$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \langle E, \chi(\check{T}*\varphi)\rangle$$
$$= \langle E, \check{T}*\varphi\rangle$$

car $\chi \equiv 1$ au voisinage de supp E.

. Mq $\partial^\alpha(E_\varepsilon * \varphi) \longrightarrow \partial^\alpha(E*\varphi)$ uniformément sur tout compact.

On a supp $(E_\varepsilon * \varphi) \subset \overline{B(0,1)} + \text{supp}\, E + \text{supp}\, \varphi$ et on conclut par la proposition précédente. ☒

PROPOSITION : Si T_1, T_2, T_3 sont dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont au moins deux sont à support compact, alors $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$.

Dém : exercice. $(\mathcal{E}' * \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}')$.

Exemple : $(1 * \delta_0') * H = (1' * \delta_0) * H$
$\qquad\qquad\quad \hookrightarrow \mathbb{1}_{x\geq 0} \qquad = 0 * H$
$$= 0$$

$$1 * (\delta_0' * H) = 1 * (\delta_0 * H')$$
$$= 1 * H' = 1 * \delta_0 = 1$$

7 L'espace de Schwartz et les distributions tempérées.

DÉFINITION : L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées : $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall |\alpha| \leq j$, $\exists C$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left[\langle x \rangle^m \, |\partial^\alpha \varphi(x)| \right] \leq C.$$

où $\langle x \rangle := \sqrt{1+|x|^2}$

Remarque : • $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par multiplication par n'importe quel polynôme, et par dérivation.

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet, muni des semi-normes

$$p_{m,j}(\varphi) := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \leq j}} \left[\langle x \rangle^m \, |\partial^\alpha \varphi(x)| \right].$$

THÉORÈME : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, à support dans $B(0,2)$ et $\chi = 1$ dans $B(0,1)$, χ à valeurs dans $[0,1]$. On pose

$$\varphi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \varphi(x).$$

Alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$,

mq $P_{m,j}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$

$$\langle x\rangle^m \partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x) = \langle x\rangle^m \partial^\alpha\big((1-\chi(\tfrac{x}{n}))\varphi(x)\big).$$

$$\partial^\alpha((1-\chi_n)\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}(1-\chi_n)\partial^\beta\varphi$$

- $\beta = \alpha$: $(1-\chi_n)\partial^\alpha\varphi$

si $|y| \leq 1$ alors $1-\chi(y) = 0$. $\Leftarrow$

si $|y| \geq 1$ alors $0 \leq 1-\chi(y) \leq |y|^2$.

Donc $\forall y$, $0 \leq 1-\chi(y) \leq |y|^2$.

Alors $\forall x$, $|(1-\chi(\frac{x}{n}))\partial^\alpha\varphi(x)|$

$$\leq \frac{\langle x\rangle^2}{n^2} |\partial^\alpha\varphi(x)|$$

- $\beta < \alpha$: $\partial^{\alpha-\beta}(1-\chi_n(x))\partial^\beta\varphi(x)$

($\chi \equiv 1$ sur $B(0,1)$ donc $\operatorname{supp}\partial^{\alpha-\beta}(1-\chi)$ ne rencontre pas $B(0,1)$.)

Donc $|\partial^{\alpha-\beta}(1-\chi_n(x))\partial^\beta\varphi(x)| \leq \frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}} |(\partial^{\alpha-\beta}\chi)(\frac{x}{n})|$
$\times |\partial^\beta\varphi(x)|$

Enfin

$$P_{m,j}(\varphi_n-\varphi) \leq C \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ |\alpha|\leq j}} \left[\frac{\langle x\rangle^2}{n^2} |\partial^\alpha \varphi(x)| \langle x\rangle^m + \frac{1}{n} C(\chi) \sup_{|\beta|\leq\alpha} |\partial^\beta \varphi(x)| \right]$$

$$\leq C'_\chi \left[\frac{1}{n^2} P_{m+2,j}(\varphi) + \frac{1}{n} P_{m,j}(\varphi) \right]$$

<u>PROPOSITION</u> : Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

alors $E * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Démonstration</u> : $E*\varphi = \langle E, \varphi(x-\cdot)\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq j$

$$\langle x\rangle^m \partial^\alpha (E*\varphi)(x) = \langle x\rangle^m E * \partial^\alpha \varphi(x)$$

Soit K compact contenant un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} E$ et p l'ordre de E.

$$|E*\partial^\alpha\varphi| = |\langle E, \partial^\alpha \varphi(x-\cdot)\rangle|$$

$$\leq C \sup_{y\in K} \sup_{|\beta|\leq|\alpha|+p} |\partial^\beta \varphi(x-y)|.$$

Donc

$$|\langle x\rangle^m \partial^\alpha(E*\varphi)(x)| \leq C \sup_{\substack{y\in K\\ |\beta|\leq|\alpha|+p}} \langle x-y+y\rangle^m |\partial^\beta \varphi(x-y)|$$

$$\leq C \left[\sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^d \\ |\beta| \leq |\alpha|+p}} \langle z \rangle^m |\partial^\beta \varphi(z)| + \sup_{y \in K} \langle y \rangle^m \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^d \\ |\beta| \leq |\alpha|+p}} |\partial^\beta \varphi(z)| \right]$$

Finalement

$$p_{m,j}(E * \varphi) \leq C' \left[p_{m,j+p}(\varphi) + p_{0,j+p}(\varphi) \right]$$

$$\leq C'' \, p_{m,j+p}(\varphi).$$

(Rq : $C'' = C(K)$)

2 cours la semaine prochaine

Partiel = DM pour les vacances (1ère semaine).